

Pour la version en vidéo de ce cours, c'est par [ici](#).

Avant de parler de fonctions, attardons-nous un instant sur les suites numériques. Cela fera office d'introduction.

Suites numériques

Les suites numériques, comme leur nom l'indique, sont des séries de nombres qui se suivent. La manière dont ils se suivent s'appelle la raison, et chaque nombre est un terme de rang $n = 0, 1, 2, \dots$

Nous parlerons ici de deux types de suites numériques : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Suites arithmétiques

Les suites arithmétiques sont des suites dont le terme suivant est égal au terme précédent plus une raison r . On écrit donc :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

La raison r peut être n'importe quel nombre, positif ou négatif. S'il est positif, on dira que la suite est croissante ; s'il est négatif, qu'elle est décroissante.

En opérant le calcul de plusieurs termes, on peut discerner un motif :

$$U_0 = U_0 + 0r$$

$$U_1 = U_0 + 1r$$

$$U_2 = U_1 + r = U_0 + 2r$$

$$U_3 = U_2 + r = U_0 + 3r$$

On en déduit une fonction permettant de trouver n'importe quel terme U de n'importe quel rang n :

$$U(n) = U_0 + nr$$

Attention, j'appelle cette expression une fonction, mais ce n'en est pas vraiment une. Elle ne fonctionne que si n est un nombre entier, et c'est là la différence. Mais peu importe...

La somme d'une suite arithmétique est la somme S des nombres constituant une suite définie sur un intervalle. On peut la calculer manuellement, ou utiliser une formule dont voici la preuve détaillée, découverte par [Carl Friedrich Gauss](#) qui, selon la légende, l'avait utilisée la première fois en réponse à un exercice long et fastidieux que lui avait donné son prof de maths :

Tout d'abord, on sait que la somme des termes est simplement le premier terme plus le deuxième terme plus le troisième terme...

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

On remplace tous les termes par la petite fonction qu'on a trouvé :

$$S = U_0 + (U_0 + r) + (U_0 + 2r) + (U_0 + 3r) + \dots + (U_0 + nr)$$

On peut séparer les termes U_0 , qui apparaissent $n + 1$ fois, des termes contenant r :

$$S = U_0 + nU_0 + r + 2r + 3r + \dots + nr$$

On peut ensuite factoriser U_0 , et factoriser r ; on note que les derniers termes sont simplement un décompte jusqu'à n :

$$S = (n + 1)U_0 + r(1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n)$$

En se concentrant sur le terme entre parenthèses que multiplie r , on définit la somme des premiers entiers s jusqu'au dernier :

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

On retourne cette équation (le premier terme en dernier, le dernier terme en premier) :

$$s = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

On fait la somme de ces deux équations :

$$2s = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1)$$

On en déduit que le double de la somme des premiers entiers est égal à $n + 1$ un nombre n de fois.

$$2s = n(n + 1)$$

On résout pour s :

$$s = n \frac{n + 1}{2}$$

Et on réintègre ce résultat à notre expression pour la somme d'une suite arithmétique :

$$S = (n + 1)U_0 + r \left(n \frac{n + 1}{2} \right)$$

On peut réécrire cette expression pour la clarifier :

$$S = (n + 1)U_0 + rn \frac{n + 1}{2}$$

$$S = (n + 1) \frac{2U_0 + rn}{2}$$

$$S = (n + 1) \frac{U_0 + U_0 + rn}{2}$$

Et comme $U_n = U_0 + rn$:

$$S = (n + 1) \frac{U_0 + U_n}{2}$$

La somme des termes d'une suite arithmétique est donc la moitié de la somme du premier et du dernier terme, divisée par deux et multiplié par le nombre total de termes plus un.

Cette démonstration n'a rien de simple – il a fallu le génie de Gauss pour imaginer représenter les derniers termes sous la forme $n - 1$, puis de faire la somme des deux expressions, etc. Je l'ajoute ici pour montrer que les mathématiques demandent d'abord et avant tout de la rigueur et de l'imagination. Une idée à conserver pour plus tard...

Suites géométriques

Les suites géométriques sont des suites dont le terme suivant U_{n+1} est égal au terme précédent U_n multiplié par une raison q .

$$U_{n+1} = U_n \times q$$

La raison q peut être n'importe quel nombre positif, mais *pas* un nombre négatif. Si la raison est supérieure à 1, la suite est croissante. Si elle est comprise entre 0 et 1, elle est décroissante.

En opérant le calcul de quelques premiers termes, on peut discerner un motif :

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0 \\ U_1 &= U_0 \times q^1 \end{aligned}$$

$$U_2 = U_1 \times q = U_0 \times q \times q = U_0 \times q^2$$

$$U_3 = U_2 \times q = U_0 \times q \times q \times q = U_0 \times q^3$$

On en déduit une fonction permettant de calculer n'importe quel terme de n'importe quel rang n :

$$U(n) = U_0 q^n$$

La somme d'une suite géométrique est la somme S des termes d'une suite géométrique sur un intervalle de 0 à n . On peut la calculer manuellement, ou utiliser une formule dont voici la preuve détaillée.

Tout d'abord, on écrit la somme des termes, les derniers termes étant encore une fois un décompte.

$$S = U_0 + U_0 q + U_0 q^2 + \dots + U_0 q^{n-1} + U_0 q^n$$

On multiplie cette somme par la raison q :

$$qS = U_0 q + U_0 q^2 + U_0 q^3 + \dots + U_0 q^n + U_0 q^{n+1}$$

On calcule la différence entre les deux équations ; tous les termes du milieu s'annulent :

$$S - qS = U_0 - U_0 q^{n+1}$$

On factorise...

$$S(1 - q) = U_0(1 - q^{n+1})$$

... et on résout pour S :

$$S = U_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

S'il existe d'autres types de suites numériques, ces deux suites nous permettent d'introduire le concept de fonction. En effet, par deux fois nous avons vu qu'il était possible de trouver n'importe quel terme de n'importe quel rang simplement en discernant un motif. Une fonction fait cela.